

Regional Mathematical Olympiad-2023

Time: 3 hours

October 29, 2023

Instructions:

- Calculators (in any form) and protractors are not allowed.
- Rulers and compasses are allowed.
- Answer all the questions.
- All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.
- Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.

1. Given a triangle ABC with $\angle ACB = 120^\circ$. The point L is marked on the side AB so that CL is the bisector of $\angle ACB$. The points N and K are marked on the sides AC and BC , respectively, so that $CN + CK = CL$. Prove that the triangle KLN is equilateral.
2. Given a prime number p such that the number $2p$ is equal to the sum of the squares of some four consecutive positive integers. Prove that $p - 7$ is divisible by 36.
3. Let $f(x)$ be a polynomial with real coefficients of degree 2. Suppose that for some pairwise distinct real numbers a, b, c we have

$$f(a) = bc; \quad f(b) = ca; \quad f(c) = ab.$$

Determine $f(a + b + c)$ in terms of a, b, c .

4. The set X of N four-digit numbers formed from the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 satisfies the following condition:
for any two different digits from 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 there exists a number in X which contains both of them.
Determine the smallest possible value of N .

5. The side-lengths a, b, c of a triangle ABC are positive integers. Let

$$T_n = (a + b + c)^{2n} - (a - b + c)^{2n} - (a + b - c)^{2n} + (a - b - c)^{2n}$$

for any positive integer n . If $\frac{T_2}{2T_1} = 2023$ and $a > b > c$, determine all possible perimeters of the triangle ABC .

6. The diagonals AC and BD of a cyclic quadrilateral $ABCD$ meet at P . The point Q is chosen on the segment BC so that PQ is perpendicular to AC . Prove that the line joining the centres of the circumcircles of triangles APD and BQD is parallel to AD .

क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2023

समय: 3 घंटे
निर्देश :

अक्टूबर 29, 2023

- किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.
- पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.
- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.
- सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.

1. दिए गए त्रिभुज ABC में $\angle ABC = 120^\circ$ है। बिंदु L को भुजा AB पर चिह्नित किया गया है जिससे कि $\angle ABC$ का द्विभाजक CL है। बिंदु N और K को भुजाओं AC और BC पर क्रमशः इस प्रकार चिह्नित किया गया है कि $CN + CK = CL$ है। सिद्ध करें कि त्रिभुज KLN समबाहु त्रिभुज है।
2. एक अभाज्य संख्या p दी गई है, जिसके लिए संख्या $2p$ किसी चार क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों के वर्गों के योग के बराबर है। सिद्ध कीजिये कि $p - 7, 36$ से विभाज्य है।
3. मान लीजिये कि $f(x)$ एक द्विघाती बहुपद है जिसके गुणांक वास्तविक हैं। मान लीजिये कि कुछ युग्मानुसार पृथक वास्तविक संख्याओं a, b, c के लिए

$$f(a) = bc; \quad f(b) = ca; \quad f(c) = ab$$

$f(a + b + c)$ का मान a, b, c के पदों में ज्ञात कीजिये.

4. अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 से बने N चार-अंकीय संख्याओं का समुच्चय X निम्नलिखित शर्त को पूरा करता है:
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ में से किसी भी दो विभिन्न अंकों के लिए X में एक ऐसी संख्या का अस्तित्व है जिसमें यह दोनों अंक निहित होते हैं।
 N के न्यूनतम संभव मान को ज्ञात कीजिये.
5. त्रिभुज ABC की भुजाओं a, b, c की लंबाइयाँ धनात्मक पूर्णांक हैं। मान लीजिये किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए

$$T_n = (a + b + c)^{2n} - (a - b + c)^{2n} - (a + b - c)^{2n} + (a - b - c)^{2n}$$

यदि $\frac{T_2}{2T_1} = 2023$ तथा $a > b > c$ है, तो त्रिभुज ABC की सभी संभव परिधियों को ज्ञात कीजिये.

6. एक चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण AC तथा BD , P पर मिलते हैं। बिंदु Q खंड BC पर इस तरह चुना गया है कि PQ, AC के लंबवत है। सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज APD तथा BQD के परिवृत्त के केंद्रों को जोड़ने वाली रेखा AD के सामानांतर है.