# Regional Mathematical Olympiad-2023

**Time: 3 hours** **October 29, 2023**

**Instructions:**

- **Calculators (in any form) and protractors are not allowed.**
- **Rulers and compasses are allowed.**
- **Answer all the questions.**
- **All questions carry equal marks. Maximum marks: 102.**
- **Answer to each question should start on a new page. Clearly indicate the question number.**

1. Let $\mathbb{N}$ be the set of all positive integers and $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 : a^2 + b^2 + c^2 = d^2\}$. Find the largest positive integer $m$ such that $m$ divides $abcd$ for all $(a, b, c, d) \in S$.

2. Let $\omega$ be a semicircle with $AB$ as the bounding diameter and let $CD$ be a variable chord of the semicircle of constant length such that $C, D$ lie in the interior of the arc $AB$. Let $E$ be a point on the diameter $AB$ such that $CE$ and $DE$ are equally inclined to the line $AB$. Prove that
(a) the measure of $\angle CED$ is a constant;
(b) the circumcircle of triangle $CED$ passes through a fixed point.

3. For any natural number $n$, expressed in base 10, let $s(n)$ denote the sum of all its digits. Find all natural numbers $m$ and $n$ such that $m < n$ and
$$(s(n))^2 = m \quad \text{and} \quad (s(m))^2 = n.$$

4. Let $\Omega_1, \Omega_2$ be two intersecting circles with centres $O_1, O_2$ respectively. Let $l$ be a line that intersects $\Omega_1$ at points $A, C$ and $\Omega_2$ at points $B, D$ such that $A$, $B$, $C$, $D$ are collinear in that order. Let the perpendicular bisector of segment $AB$ intersect $\Omega_1$ at points $P, Q$; and the perpendicular bisector of segment $CD$ intersect $\Omega_2$ at points $R, S$ such that $P, R$ are on the same side of $l$. Prove that the midpoints of $PR$, $QS$ and $O_1O_2$ are collinear.

5. Let $n > k > 1$ be positive integers. Determine all positive real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ which satisfy
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{k a_i^k}{(k-1)a_i^k + 1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i = n.$$

6. Consider a set of 16 points arranged in a $4 \times 4$ square grid formation. Prove that if any 7 of these points are coloured blue, then there exists an isosceles right-angled triangle whose vertices are all blue.

———-0———-

# क्षेत्रीय गणित ओलिंपियाड – 2023

**समय: 3 घंटे** **अक्टूबर 29, 2023**

**निर्देश :**

- **किसी भी तरह के गणक (calculators) तथा चांदा (protractors) के प्रयोग की अनुमति नहीं है.**
- **पैमाना (rulers) तथा परकार (compasses) के प्रयोग की अनुमति है.**
- **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये.**
- **सभी प्रश्नों के अंक समान हैं. अधिकतम अंक : 102**
- **प्रत्येक प्रश्न का उत्तर नए पृष्ठ से प्रारंभ कीजिये. प्रश्न क्रमांक स्पष्ट रूप से इंगित कीजिये.**

1. मान लीजिये ℕ सारे धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय है और $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4 : a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. उस सबसे बड़े उस धनात्मक पूर्णांक $m$ को ज्ञात कीजिये जो $abcd$ को सभी $(a, b, c, d) \in S$ के लिए विभाजित करता है.
2. मान लीजिये ω एक अर्धवृत्त है जिसका सीमांकन व्यास $AB$ है. अर्धवृत्त की नियत लम्बाई की चर जीवा $CD$ इस प्रकार है कि $C, D$ वृत्तचाप $AB$ के अंत: क्षेत्र में हैं. मान लीजिये व्यास $AB$ पर एक बिंदु $E$ इस प्रकार है कि $CE$ तथा $DE$, रेखा $AB$ पर समान रूप से नत हैं. सिद्ध कीजिये कि
   (a) $\angle CED$ की एक नियत माप है.
   (b) त्रिभुज $CED$ का परिवृत्त एक स्थिर बिंदु से हो कर गुजरता है.
3. किसी प्राकृत संख्या $n$ के लिए जिसको आधार 10 में व्यक्त किया गया है, मान लीजिये $s(n)$ इसके सभी अंकों के योग को निरूपित करता है. उन सभी प्राकृत संख्याओं $m$ तथा $n$ को ज्ञात कीजिये जिनके लिए $m < n$ है, तथा
$$(s(n))^2 = m \quad \text{तथा} \quad (s(m))^2 = n.$$
4. मान लीजिये कि $\Omega_1, \Omega_2$ दो प्रतिच्छेदी वृत्त हैं जिनके केंद्र क्रमश: $O_1$ तथा $O_2$ हैं. मान लीजिये कि $l$ एक रेखा है जो $\Omega_1$ को $A, C$ पर तथा $\Omega_2$ को $B, D$ पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $A, B, C, D$ (इसी क्रम में) समरेखीय होते हैं. मान लीजिये कि रेखाखंड $AB$ का लम्ब समद्विभाजक $\Omega_1$ बिंदु $P, Q$ पर प्रतिच्छेद करता है; तथा रेखाखंड $CD$ का लम्ब समद्विभाजक $\Omega_2$ बिंदु $R, S$ पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $P, R$ रेखा $l$ के एक ही ओर हैं. सिद्ध कीजिये कि $PR$, $RS$ तथा $O_1O_2$ के मध्यबिंदु समरेखीय हैं.
5. मान लीजिये कि $n > k > 1$ धनात्मक पूर्णांक हैं. वह सभी धनात्मक वास्तविक संख्याएँ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ ज्ञात कीजिये जो निम्न को संतुष्ट करती हों
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{k a_i^k}{(k-1)a_i^k + 1}} = \sum_{i=1}^{n} a_i = n$$
6. 16 बिंदुओं के एक समुच्चय पर विचार कीजिये जो कि एक $4 \times 4$ की वर्गाकार ग्रिड (grid) में व्यवस्थित किये गये हैं. सिद्ध कीजिये कि यदि इनमें से कोई 7 बिंदु नीले रंग के हों तो एक ऐसे समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज का आस्तित्व है जिसके सभी शीर्ष नीले रंग के हैं.

—---------00 —---------